Zadania ze statystyki cz. 8 I rok socjologii

Zadanie 1.

W potocznej opinii pokutuje przekonanie, że lepsi z matematyki są chłopcy niż dziewczęta. Chcąc zweryfikować tę opinię, przeprowadzono badanie w jednej z klas. Wzięto pod uwagę oceny, które otrzymali uczniowie z matematyki na koniec semestru. Wyniki prezentuje tabela poniżej. Czy rzeczywiście z matematyki lepsi są chłopcy? Należy sprawdzić tę hipotezę na poziomie istotności $\alpha \leq 0,05$.

	dziewczęta	chłopcy
1	2	3
2	2	3
3	3	3
4	3	3
5	3	3
6	3	3
7	4	3
8	4	4
9	4	4
10	4	5
11	5	5
12	5	5
13	5	6
14	5	
15	6	

Zadanie 2

Testowano nową metodę uczenia się. Do tego celu wybrano 200 studentów, których następnie podzielono na dwie równoliczne grupy. Pierwsza grupa uczyła się z wykorzystaniem tej nowej techniki, zaś druga tradycyjnymi metodami. Średni czas zapamiętania tekstu w pierwszej grupie wynosił 40 minut, przy odchyleniu standardowym 10 minut, zaś w drugiej grupie 65 minut przy odchyleniu standardowym 8 minut. Czy na poziomie istotności $\alpha \leq 0,03$ można powiedzieć, że nie ma różnic między nową a tradycyjnymi metodami nauki? Uproszę uzasadnić odpowiedź obliczeniami.

Zadanie 3.

W badaniu nad warunkami życia porównano dochody kobiet i mężczyzn. Wyszło, że przeciętne dochody kobiet wynoszą 1800 zł a mężczyzn 2100. Wiedząc, że odchylenie standardowe dochodów kobiet wynosi 200 zł a mężczyzn 1000 zł oraz to, że kobiet było 10 a mężczyzn 20 w próbie, należy ustalić:

a. Czy dochody kobiet i mężczyzn różnią się od siebie na poziomie istotności $\alpha \leq 0,05$
b. Czy kobiety uzyskują niższe dochody od mężczyzn przy poziomie $\alpha \leq 0,05$
c. Jaka maksymalna różnica między dochodami kobiet i mężczyzn pozwoli stwierdzić jej nieistotność, przy poziomie istotności $\alpha \leq 0,01$.

Zadanie 4.

Wykonano pewien eksperyment skuteczności działania pewnej reklamy na zmianę postawy. Wylosowano 10 osobową próbę studentów, których poproszono o ocenę pewnego produktu, stosując narzędzie, gdzie niskie wyniki odpowiadają niskiej ocenie a wysokie, wysokiej ocenie produktu (w skali od 1 do 10, gdzie 10 najwyższa ocena danego produktu). Następnie wyświetlono film reklamowy o tym produkcie i poproszono o ponową ocenę, stosując to samo narzędzie. Wyniki pomiarów prezentuje tabela. Należy:

a. Ustalić, czy reklama zmieniła postawy, przy poziomie istotności $\alpha \leq 0,05$
b. Ustalić, czy po reklamie lepiej oceniano produkt, zakładając poziom $\alpha \leq 0,05$

pomiar 1	pomiar 2
2	5
2	7
3	4
4	3
4	5
4	4
5	6
6	8
6	7
7	9

Zadanie 5

Studenci zgłosili skargę na pewnego prowadzącego, zarzucając mu stronniczy sposób oceniania ich prac. Poproszono więc innego nauczyciela, aby raz jeszcze dokonał oceny. Wyniki prezentuje tabela. Należy ustalić,

a. Czy nauczyciel był stronniczy, przyjmując poziom istotności $\alpha \leq 0,05$
b. Czy drugi nauczyciel oceniał lepiej uczniów, przyjmując $\alpha \leq 0,05$

I nauczyciel	II nauczyciel
3	3
3	4
2	3
5	5
4	5
4	4
6	5
2	4

Zadanie 6.

Nauczyciel w pewnej klasie zastanawiał się, czy miejsca zajmowane przez uczniów w sali mają wpływ na wyniki w nauce z przedmiotu przez prowadzonego niego. W tym celu poprosił, aby uczniowie zamienili się miejscami. Ci, którzy do tej pory siedzieli z tyłu przenieśli się do przednich ławek, a ci, którzy zajmowali miejsca z przodu, do tylnich. Po pewnym czasie otrzymał pewne wyniki. Czy zmiana miejsca w sali wpływa na ocenę, przy poziomie istotności $\alpha \leq 0, 01$.

z tyłu	do przodu	z przodu	do tyłu
2	3	4	4
2	4	4	5
2	3	5	5
4	5	3	3
3	4	6	5
3	4	5	5
4	5		
2	4		

Zadanie 7.

Nauczyciel podzielił uczniów w klasie na trzy grupy. Uczniowie w każdej z nich mieli za zadanie nauczyć się wiersza na pamięć, wykorzystując różne techniki zapamiętywania: 1. wielokrotne powtarzanie; 2. Techniki wyobrażeniowe; 3. Techniki graficzne. Po pewnym czasie nauczyciel zmierzył, ile wersów udało się zapamiętać. Czy na poziomie istotności $\alpha \leq 0, 05$, można powiedzieć, że nie ma różnic w ilości zapamiętanych wersów między tymi trzema grupami? Między którymi grupami różnice w ilości zapamiętanych wersów są istotne statystycznie?

gr. I	gr. II	gr. III
3	3	4
4	5	4
4	5	6
5	5	7
5	5	7
5	5	7
6	5	8
6	7	10
7	9	12
7	12	13
8	12	14

PODSUMOWANIE WYKŁADU

Testy statystyczne dla dwóch średnich – dwie próby niezależne

- Jeśli dwie próby odzwierciedlają dwie różne populacje, a struktura jednej z nich nie jest związana ze strukturą drugiej, to **próby są niezależne.**
- Dla każdej z nich możemy osobno obliczyć jej statystyki (średnią i odchylenie standardowe)

- Porównując ze sobą dwie próby chcemy dowiedzieć się, czy różnice między nimi są na tyle duże, aby były istotne statystyczne, czyli występowały w populacjach.
- Postać hipotezy zerowej:

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2$$

- Postać hipotezy alternatywnej:
- $H_1: \quad \mu_1 \neq \mu_2$

- Istotność różnicy między dwoma próbami testować będziemy poprzez odniesienie jej statystyki do wartości krytycznych rozkładu t Studenta (rozkład różnic pomiędzy wszystkimi teoretycznie możliwymi parami średnich z próby).
- Ten typ testu jest stosowany w przypadku badań eksperymentalnych, porównujących wpływ bodźca .

- Dwie metody testowania:
  1. gdy wariancje obu populacji (prób) są równe
  2. gdy wariancje obu populacji są od siebie różne.

Rozróżnienie tych metod związane jest z odmiennym szacowaniem wielkości błędu standardowego próby.

Metoda gdy wariancje obu prób są równe (założenie o **homogeniczności lub jednorodności wariancji**).

1. testujemy założenie o równości wariancji:

$$H_0: \quad \sigma_1 = \sigma_2$$

$$H_1: \quad \sigma_1 \neq \sigma_2$$

$$F = \frac{s^2 większe}{s^2 mniejsze}$$

2. Obliczamy zdeterminowaną przez test na równość wariancji statystykę testu t.
3. porównujemy statystykę testu t z wartością obszaru krytycznego i podejmujemy decyzję czy dwie populacje są podobne czy różne od siebie.

- **Gdy wariancje są równie (nie ma podstaw aby odrzucić hipotezę o równości wariancji), statystykę testu *t* obliczamy :**

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{N_1 * s_1^2 + N_2 * s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}\right)\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)}}$$

$\bar{x}_1 - średnia\ pierwszej\ próby$

$\bar{x}_2 -$ *średnia drugiej próby*
$s_1^2 -$ *wariancja dla pierwszej próby*
$s_2^2 -$ *wariancja dla drugiej próby*
$N_1 -$ *liczebność pierwszej próby*
$N_2 -$ *liczebność drugiej próby*

- Liczbę stopni swobody testu *t* obliczamy:

$$df = N_1 + N_2 - 2$$

- **Gdy wariancje są nierówne , statystykę testu *t* (Cochrana – Coxa) obliczamy :**

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{N_1 - 1} + \frac{s_2^2}{N_2 - 1}\right)}}$$

- Liczbę stopni swobody testu *t* obliczamy:

$$df = N_{mniejszej\ próby} - 1$$

Test dla dwóch prób zależnych – połączonych w pary.

- Z próbami zależnymi mam do czynienia wtedy, gdy tę samą grupę badamy dwa razy. Zależność próby oznacza tu sytuację, w której możliwość znalezienia się w drugiej próbie spowodowana była koniecznością znalezienia się w próbie pierwszej.
- Próby zależne spotkać możemy w badaniach typu eksperymentalnego, gdzie próba jest raz badana przez eksperymentem i drugi raz po eksperymencie (prze wprowadzeniem bodźca i po wprowadzeniu bodźca).
- Celem tego testu jest stwierdzenie, czy między „dwoma" próbami zaszła zmiana, wynikająca z zastosowania procedury eksperymentalnej.

Test dla dwóch prób zależnych – dla dużych prób, dla znanego odchylenie standardowego populacji.

- Gdy N>30;
- Znane jest odchylenie standardowe w populacji σ
- testem pozwalającym stwierdzić, czy różnice między dwoma pomiarami są istotne statystycznie jest **test *z***:

$$z = \frac{\overline{D}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}}$$

$\overline{D} -$ *średnia różnic wskazań w próbie*
σ_1^2 *− wariancja pierwszej populacji*
σ_2^2 *− wariancja drugiej populacji*
$N_1 -$ *liczebność pierwszej próby*
$N_2 -$ *liczebność drugiej próby*

Test dla dwóch prób zależnych – dla dużych prób dla nieznanego odchylenia standardowego w populacji

- **Gdy N>30;**
- **Nieznane jest odchylenie standardowe populacji**

$$z = \frac{\overline{D}}{\frac{s_D}{\sqrt{N_p}}}$$

$\overline{D} -$ *średnia różnic wskazań w próbie*
$N_p -$ *liczba par w próbie*
$s_D -$ *odchylenie standardowe różnic w próbie*

$$s_D = \sqrt{\frac{\sum(D - \overline{D})^2}{N_p}}$$

$D -$ *różnice w próbie*

Test dla dwóch prób zależnych – dla małych prób.

- **Gdy N < 30:**
- **testem pozwalającym na stwierdzenie, czy różnice między dwoma pomiarami (próbami) są istotne statystycznie jest test *t***

$$t = \frac{\overline{D}}{\frac{s_D}{\sqrt{N_p - 1}}} \quad dla \;\; df = N_p - 1$$

Testy statystyczne dla więcej niż dwóch prób – ANOVA (analiza wariancji)

- Celem analizy wariancji jest stwierdzenie, czy różnice występujące między więcej niż dwoma próbami są na tyle duże, aby były one istotne dla całej populacji.
- ANOVA bada różnice w wariancji (rozproszeniu) cechy w kilku różnych próbach mają podobny czy też odmienny charakter między sobą oraz wariancją tych połączonych prób.
- ANOVA pozwala również badać związki między dwoma zmiennymi, gdzie jedna z nich musi być mierzona na silnej (ilościowej) skali , druga na dowolnej. Zwykle zmienną niezależną jest ta, która jest mierzona na skali słabszej, zaś każda kategoria tej zmiennej stanowi osobną próbę.
- Analizę wariancji (ANOVA) stosujemy, gdy prób (kategorii zmiennej niezależnej) jest więcej niż dwie.

ANOVA – idea wykorzystania wariancji do badania różnic w średnich.

- Jeśli próby mają wyraźnie różne wartości średnie (średnie arytmetyczne, mediany lub dominanty), to po ich połączeniu w jedną zbiorowość, rozproszenie tej zbiorowości będzie wyraźnie większe niż rozproszenie każdej z prób osobno.
- Źródłem wariancji połączonej zbiorowości (**wariancja ogółem**) są:
  1. wariancje każdej z prób traktowanej osobno (**wariancje wewnątrzgrupowe**)
  2. wariancje (zróżnicowania) między średnich każdej z prób (**wariancja międzygrupowa**).

Wariancja ogółem= wariancja wewnątrzgrupowa + wariancja międzygrupowa

$$SK_C = SK_M + SK_W$$

- Jeśli różnice w średnich między próbami są duże, to wariancja międzygrupowa jest duża, jeśli różnice między średnimi są małe, to wariancja międzygrupowa jest mała.
- Wariancja międzygrupowa – to inaczej **wariancja wyjaśniona , różnicami między średnimi prób.**
- Wariancja wewnątrzgrupowa – to inaczej **wariancja niewyjaśniona, z tego względu, że zróżnicowanie wewnątrz każdej z prób osobno nie ma ostatecznego wpływu na wniosek jaki wysnujemy.**
- **Hipoteza o nierówności średnich –** będzie prawdziwa wtedy, kiedy wariancja międzygrupowa będzie wyraźnie większa od wariancji wewnątrzgrupowej.

Test ANOVA – test F.

- Testem badającym istotność różnic między próbami jest test F.
- Założenia analizy wariancji:
  1. losowy charakter doboru prób
  2. normalny rozkład cechy w populacji
  3. takie same wariancje w poszczególnych próbach

Procedura analizy wariancji:

1. Ustalamy hipotezę zerową , zakładającą równość między średnimi
2. Zakładamy w hipotezie alternatywnej, że zachodzi przynajmniej jedna nierówność między średnimi.
3. Obliczamy statystykę testu F.
4. Porównujemy statystykę testu F do wartości krytycznej rozkładu F.

Hipotezy:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_3 = \mu_2$$

Test F:

$$F = \frac{\hat{\sigma}_M^2}{\hat{\sigma}_W^2}$$

$\hat{\sigma}_M^2 -$ *oszacowanie wariancji międzygrupowej*

$\hat{\sigma}_W^2 -$ *oszacowanie wariancji wewnątrzgrupowej*

Szacowanie wariancji międzygrupowej i wewnątrzgrupowej

- Szacowanie wariancji:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N-1}$$

- Szacowanie wariancji międzygrupowej:

$$\hat{\sigma}_M^2 = \frac{SK_M}{df_M}$$

$SK_M -$ *międzygrupowa suma kwadratów*

$df_M -$ *liczba stopni swobody dla* SK_M

- Szacowanie wariancji wewnątrzgrupowej:

$$\hat{\sigma}_W^2 = \frac{SK_W}{df_W}$$

$SK_W -$ *wewnątrzgrupowa suma kwadratów*

$df_W -$ *liczba stopni swobody dla* SK_W

- Międzygrupowa suma kwadratów:

$$SK_M = \frac{(\sum x_{i1})^2}{N_1} + \frac{(\sum x_{i2})^2}{N_2} + \cdots + \frac{(\sum x_{ik})^2}{N_k} - \frac{(\sum x_i)^2}{N}$$

$$df_M = k - 1$$

$$k - liczba\,prób$$

- Wewnątrzgrupowa suma kwadratów:

$$SK_W = SK_C - SK_M$$

$$df_W = (N-1) - (k-1)$$

$$SK_c = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$SK_C = \sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{N}$$